



VỀ MỘT THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TRONG PHÂN TÍCH BÀI TOÁN SIÊU TĨNH DÂM CHỊU UỐN

Khổng Doãn Điền, Nguyễn Văn Huyền, Nguyễn Duy Chính
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên

Ngày nhận: 10/12/2016
Ngày sửa chữa: 20/01/2017
Ngày xét duyệt: 05/03/2017

Tóm tắt:

Trong sức bền vật liệu, bài toán về các kết cấu siêu tĩnh là một bài toán khó, đặc biệt sẽ rất phức tạp nếu bậc siêu tĩnh của kết cấu lớn. Trong bối cảnh từ lần thi thứ XXIX năm 2017, ban tổ chức Olympic Cơ học Toàn quốc chính thức đưa vào môn thi Ứng dụng tin học trong Sức bền vật liệu, lập trình trên nền phần mềm Maple, vì vậy việc nghiên cứu các thuật toán giải các bài toán sức bền vật liệu nói chung và lớp các bài toán về các kết cấu siêu tĩnh nói riêng là một vấn đề hết sức quan trọng và ý nghĩa. Bài báo này trình bày một thuật toán giải bài toán dâm siêu tĩnh chịu uốn có số bậc siêu tĩnh lớn. Các kết quả tính toán và mô phỏng được lập trình trên phần mềm Maple 2016 và so sánh với các công bố của Hội Cơ học Việt Nam [4] cho kết quả chính xác và tin cậy.

Từ khóa: Sức bền vật liệu, dâm, kết cấu siêu tĩnh, bậc siêu tĩnh.

1. Đặt vấn đề

Kết cấu siêu tĩnh [1,2] trong thực tế được sử dụng rất rộng rãi do tính ưu việt của nó đó là độ cứng vững của kết cấu rất cao. Hầu hết các kết cấu trong thực tế đều là các kết cấu siêu tĩnh, có bậc siêu tĩnh lớn [5], chẳng hạn như cầu, mái vòm sân vận động, kết cấu khung nhà thép, giàn khoan, nhà giàn trên biển,... Tuy có tính ưu việt trong thực tế kỹ thuật, nhưng trong tính toán đặc biệt là các tính toán tối ưu, việc giải các bài toán siêu tĩnh không phải đơn giản, và có thể không khả thi trong trường hợp kết cấu có bậc siêu tĩnh rất lớn.

Ngày nay, với sự phát triển của công nghệ thông tin, rất nhiều phần mềm toán học, cơ học ra đời để hỗ trợ các nhà kỹ thuật trong tính toán kết cấu. Với việc sử dụng các phương pháp mạnh như phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), phương pháp đối xứng ngược (RAY), việc giải các kết cấu siêu tĩnh trở nên đơn giản hơn. Một số phần mềm kinh điển có thể kể đến ở đây như phần mềm phân tích kết cấu SAP2000, INVENTOR, CATIA, ABAQUS ... Tuy nhiên, xét về mặt học thuật việc sử dụng các phần mềm này tuy mang lại nhiều hiệu quả, nhưng với sinh viên, người nghiên cứu thì nó làm mất đi tính tư duy, kiến thức nền tảng của người học, vì đơn thuần người sử dụng chỉ cần biết vào/ra dữ liệu là đủ, mà không hình dung được quá trình tính toán diễn ra như thế nào. Từ đó không thể có những can thiệp, cải tiến sâu hơn về mặt thuật toán để có thể giải quyết được các kết cấu mới, lớp các bài toán mới mà các phần mềm kể trên chưa cập nhật.

Trong bối cảnh, từ năm 2017, Ban Tổ chức Olympic Cơ học Toàn quốc chính thức đưa vào môn thi thứ 11. Lấy ý tưởng từ việc sinh viên được học

học phần Sức bền vật liệu truyền thống và được cung cấp kiến thức lập trình, tư duy toán học, xử lý thuật toán. Với mục đích ứng dụng công nghệ thông tin trong tính toán, để đơn giản hóa những bài toán phức tạp, những kết cấu siêu tĩnh bậc cao, mà không làm mất đi cái hồn của thuật toán (cái hồn của phương pháp giải [3]), Ban tổ chức chính thức chọn phần mềm toán học Maple để xây dựng một người sinh viên kỹ thuật hoàn thiện đầy đủ về các mặt Toán, Tin, Cơ.

Bài báo này trình bày một thuật toán giải bài toán dâm siêu tĩnh chịu uốn có số bậc siêu tĩnh lớn. Các kết quả tính toán và mô phỏng được lập trình trên phần mềm Maple 2016 và so sánh với các công bố của Hội Cơ học Việt Nam [4] cho kết quả chính xác và tin cậy.

2. Cơ sở lý thuyết [2,5]

Để giải được các kết cấu siêu tĩnh nói chung và đặc biệt là các kết cấu siêu tĩnh có bậc siêu tĩnh lớn đối với lớp các bài toán dâm chịu uốn thì việc xây dựng các hàm độ võng, góc xoay, hàm mô tả mô men uốn và lực cắt trong dâm phụ thuộc vào vị trí mặt cắt là việc làm chính yếu. Bài báo trình bày thuật toán cải tiến dựa trên nền phương pháp kinh điển thông số ban đầu. Dạng biểu diễn tổng của hàm độ võng, góc xoay, mô men uốn và lực cắt trong dâm chịu uốn lần lượt được biểu diễn như sau:

$$y(z) = \sum_{i=1}^n \left(\begin{aligned} &\Delta y_{0i} \Phi_0 + \Delta \phi_{0i} \Phi_1 + M_{0i}^* \frac{\Phi_2}{EJ} + \\ &+ P_{0i} \frac{\Phi_3}{EJ} + \Delta q_{0i} \frac{\Phi_4}{EJ} + \\ &+ q_{0i} \frac{\Phi_5}{EJ} + q_{0i} \frac{\Phi_6}{EJ} + \dots \end{aligned} \right) \quad (1)$$

$$\varphi(z) = \frac{dy(z)}{dz} \quad (2)$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^n \left(M_{0i}^* \Phi_0 + P_{0i} \Phi_1 + \Delta q_{0i} \Phi_2 + \dots + q_{0i}^* \Phi_3 + q_{0i}^* \Phi_4 + \dots \right) \quad (3)$$

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz} \quad (4)$$

trong đó hàm vị trí được biểu diễn

$$\Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & z \geq a_{i-1} \\ 0 & 0 \leq z \leq a_{i-1} \end{cases} \quad (5)$$

i là tên đoạn dầm khảo sát

a_i là đầu trái của đoạn i có tọa độ a_{i-1}

a_{i-1} là khoảng cách từ đầu trái của dầm đến mặt cắt phân chia giữa đoạn $(i-1)$ và đoạn i

EJ là độ cứng của các mặt cắt ngang dầm

$\Delta y_{0i}, \Delta \varphi_{0i}$ lần lượt là bước nhảy của độ võng và góc xoay tại đầu trái đoạn i

M_{0i}^*, P_{0i} mô men ngoại lực và lực tập trung tại đầu trái đoạn i

$\Delta q_{0i}, q_{0i}^*, q_{0i}^* \dots$ bước nhảy của hàm và các đạo hàm các cấp của q tại đầu trái đoạn i .

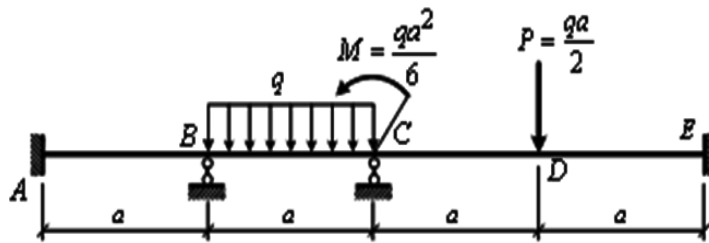
3. Thuật giải lập trình và kết quả

Để minh chứng cho sức mạnh của thuật toán, các tác giả khảo sát và nghiên cứu dầm siêu tĩnh bậc 4 có sơ đồ như Hình 1 [4].

Dầm có độ cứng EJ không đổi, bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm. Cho $a = 1m, q = 50N/cm, EJ = 32.10^7 Ncm^2$

Thực hiện các công việc sau :

1. Tính các phản lực liên kết ?
2. Vẽ biểu đồ chuyển vị của các mặt cắt ngang dầm ?
3. Xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị và vị trí mặt cắt ngang tương ứng ?
4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm ?
5. Tính ứng suất tương đương và vị trí mặt cắt ngang tương ứng có ứng suất tương đương lớn nhất (mặt cắt nguy hiểm nhất) ?



Hình 1. Kết cấu dầm 4 bậc siêu tĩnh

Số bậc siêu tĩnh của hệ bằng 4, với số bậc siêu tĩnh lớn việc giải bằng các phương pháp truyền thống chẳng hạn như phương pháp lực, phương pháp năng lượng, phương pháp nhân biểu đồ Vêrêshagin là không khả thi vì quá phức tạp. Bằng một chương trình máy tính được lập trình trên nền phần mềm

Maple 2016 ta thu được các kết quả như sau:

Các hàm vị trí :

$$\Phi_1 = z - 3a; \Phi_2 = \frac{1}{2}(z - 3a)^2; \Phi_3 = \frac{1}{6}(z - 3a)^3$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{24}(z - 3a)^4; \Phi_5 = \frac{1}{120}(z - 3a)^5$$

Hàm lực cắt trên từng đoạn dầm:

$$\begin{cases} RA & 0 \leq z \text{ and } z \leq l \\ RA + RB - q(z - l) & l \leq z \text{ and } z \leq 2l \\ RA + RB - q(z - l) + RC + q(z - 2l) & 2l \leq z \text{ and } z \leq 3l \\ RA + RB - q(z - l) + RC + q(z - 2l) - P & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hàm mô men uốn trên từng đoạn dầm:

$$\begin{cases} RA z + MA & 0 \leq z \text{ and } z \leq l \\ RA z + MA + RB(z - l) - \frac{1}{2} q(z - l)^2 & l \leq z \text{ and } z \leq 2l \\ RA z + MA + RB(z - l) - \frac{1}{2} q(z - l)^2 - Ms + RC(z - 2l) + \frac{1}{2} q(z - 2l)^2 & 2l \leq z \text{ and } z \leq 3l \\ RA z + MA + RB(z - l) - \frac{1}{2} q(z - l)^2 - Ms + RC(z - 2l) + \frac{1}{2} q(z - 2l)^2 - P(z - 3l) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hàm độ võng trên từng đoạn dầm:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{MAz^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RAz^3}{EJ} & 0 \leq z \text{ and } z \leq l \\ \frac{1}{2} \frac{MAz^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RAz^3}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RB(z-l)^3}{EJ} - \frac{1}{24} \frac{q(z-l)^4}{EJ} & l \leq z \text{ and } z \leq 2l \\ \frac{1}{2} \frac{MAz^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RAz^3}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RB(z-l)^3}{EJ} - \frac{1}{24} \frac{q(z-l)^4}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{Ms(z-2l)^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RC(z-2l)^3}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{q(z-2l)^4}{EJ} & 2l \leq z \text{ and } z \leq 3l \\ \frac{1}{2} \frac{MAz^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RAz^3}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RB(z-l)^3}{EJ} - \frac{1}{24} \frac{q(z-l)^4}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{Ms(z-2l)^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RC(z-2l)^3}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{q(z-2l)^4}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{P(z-3l)^3}{EJ} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hàm góc xoay trên từng đoạn dầm:

$$\begin{cases} \frac{MAz}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RAz^2}{EJ} & 0 \leq z \text{ and } z \leq l \\ \frac{MAz}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RAz^2}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RB(z-l)^2}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{q(z-l)^3}{EJ} & l \leq z \text{ and } z \leq 2l \\ \frac{MAz}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RAz^2}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RB(z-l)^2}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{q(z-l)^3}{EJ} - \frac{Ms(z-2l)}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RC(z-2l)^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{q(z-2l)^3}{EJ} & 2l \leq z \text{ and } z \leq 3l \\ \frac{MAz}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RAz^2}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RB(z-l)^2}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{q(z-l)^3}{EJ} - \frac{Ms(z-2l)}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{RC(z-2l)^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{q(z-2l)^3}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{P(z-3l)^2}{EJ} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Sau khi đã thiết lập được các hàm nội lực và hàm chuyển vị trong dầm siêu tĩnh trên, để xác định được các phản lực liên kết, ta sử dụng các điều kiện biên về chuyển vị tại các vị trí liên kết và kết hợp với các phương trình cân bằng:

$$pt1 := subs(z = 1, y[1]) = 0;$$

$$\frac{1}{2} \frac{MA l^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RA l^3}{EJ} = 0$$

$$pt2 := subs(z = 2 \cdot l, y[2]) = 0;$$

$$\frac{2}{3} \frac{MA l^2}{EJ} + \frac{4}{3} \frac{RA l^3}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{RB l^3}{EJ} - \frac{1}{24} \frac{q l^4}{EJ} = 0$$

$$pt3 := subs(z = 4 \cdot l, y[4]) = 0;$$

$$\frac{8}{3} \frac{MA l^2}{EJ} + \frac{32}{3} \frac{RA l^3}{EJ} + \frac{9}{2} \frac{RB l^3}{EJ} - \frac{65}{24} \frac{q l^4}{EJ} - \frac{2}{3} \frac{Ms l^2}{EJ} + \frac{4}{3} \frac{RC l^3}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{P l^3}{EJ} = 0$$

$$pt4 := subs(z = 4 \cdot l, \phi[4]) = 0;$$

$$\frac{4}{3} \frac{MA l}{EJ} + \frac{8}{3} \frac{RA l^2}{EJ} + \frac{9}{2} \frac{RB l^2}{EJ} - \frac{19}{6} \frac{q l^3}{EJ} - \frac{2}{3} \frac{Ms l}{EJ} + \frac{2}{3} \frac{RC l^2}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{P l^2}{EJ} = 0$$

$$ptcb1 := RA + RB + RC + RE = P + q \cdot l;$$

$$RA + RB + RC + RE = l q + P$$

$$ptcb2 := MA - RB \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{3 \cdot l}{2} - RC \cdot 2 \cdot l - Ms + P \cdot 3 \cdot l - RE \cdot 4 \cdot l + ME = 0;$$

$$MA - RB l + \frac{3}{2} q l^2 - 2RC l - Ms + 3 P l - 4 RE l + ME = 0;$$

Sau đó giải hệ các phương trình trên ta thu được kết quả:

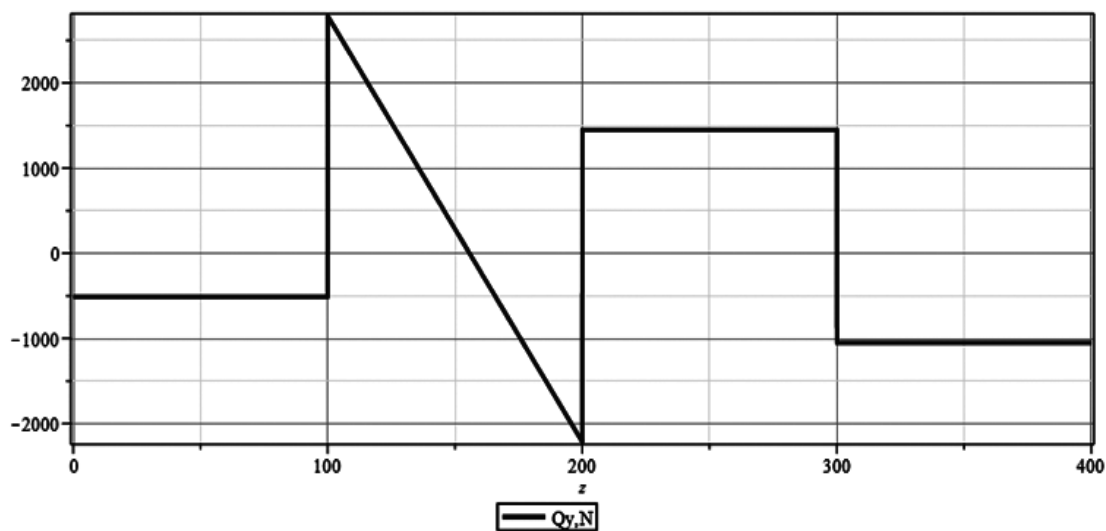
$$l := 100; q := 50; EJ := 32 \cdot 10^7; Ms := \frac{1}{6} \cdot q \cdot l^2; P := \frac{1}{2} \cdot q \cdot l;$$

$$evalf(solve(\{pt1, pt2, pt3, pt4, ptcb1, ptcb2\}, \{MA, RA, RB, RC, RE, ME\}));$$

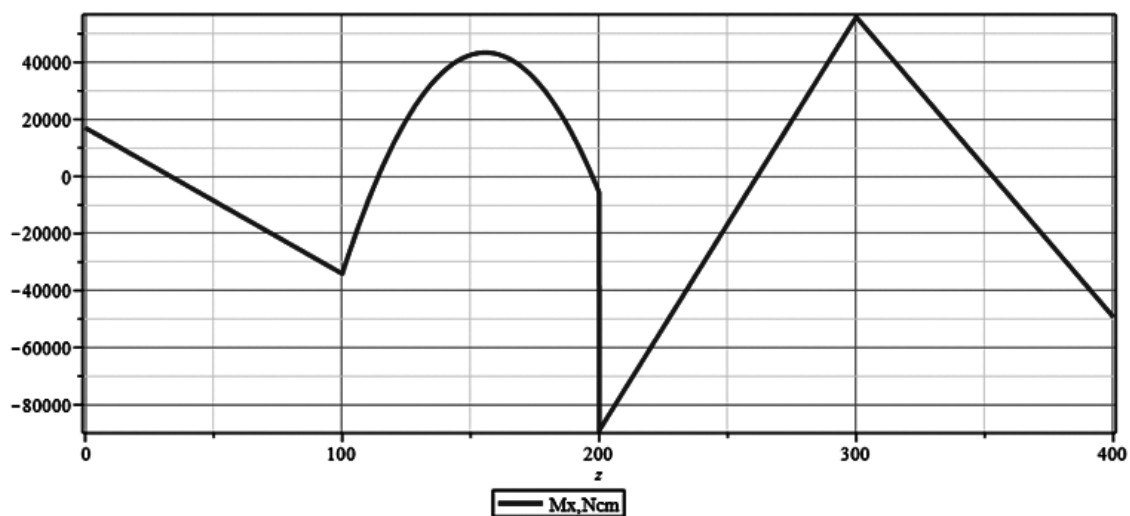
$$\{MA = 17045.45455, ME = 49242.42424, RA = -511.3636364, RB = 3295.454545, RC = 3664.772727, RE = 1051.136364\}$$

assign(%);

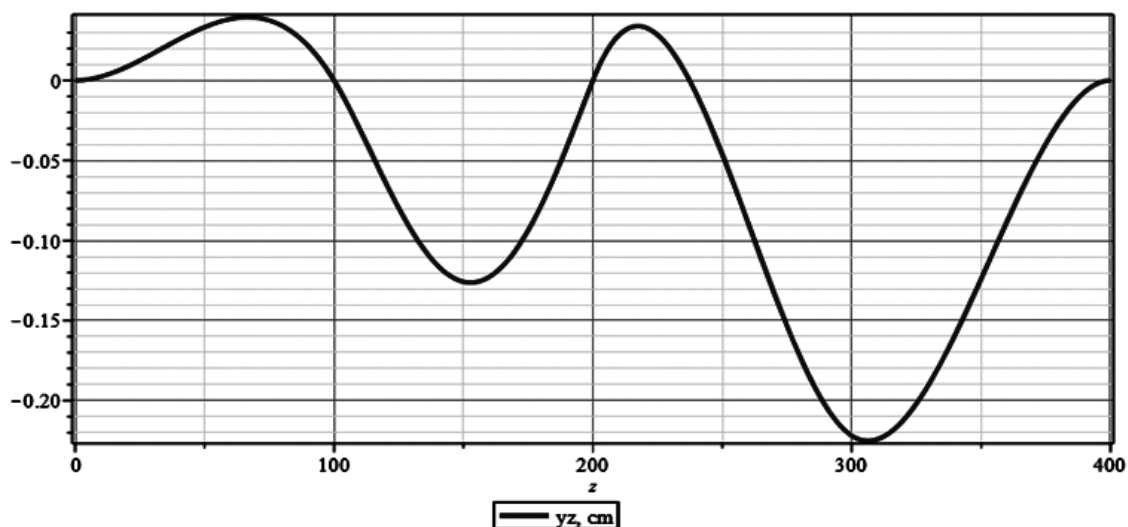
Từ đó các hàm nội lực và chuyển vị trong dầm hoàn toàn xác định. Biểu đồ nội lực và chuyển vị trong dầm siêu tĩnh thu được lần lượt như sau:



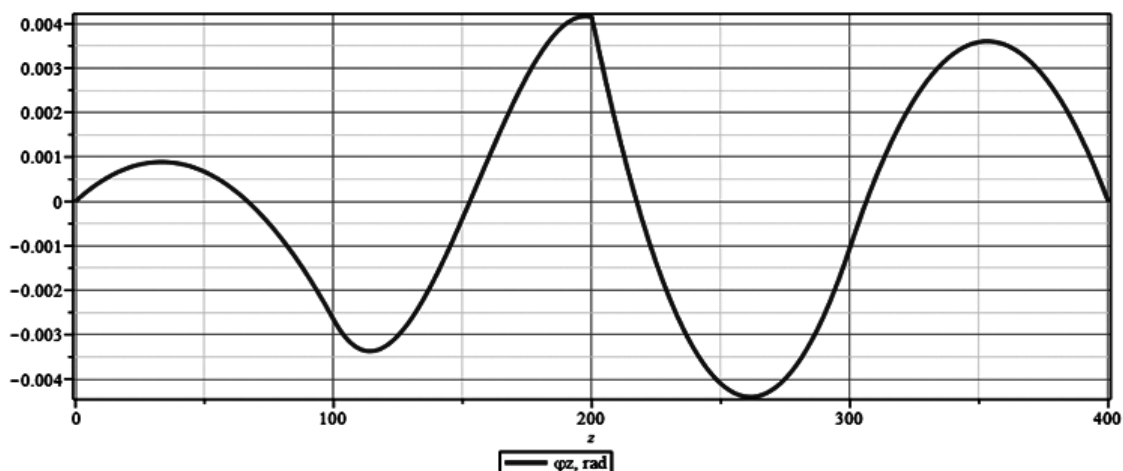
Hình 2. Biểu đồ lực cắt



Hình 3. Biểu đồ mô men uốn



Hình 4. Biểu đồ độ võng



Hình 5. Biểu đồ góc xoay

Để xác định độ võng lớn nhất và vị trí mặt cắt có độ võng lớn nhất và mặt cắt có ứng suất tương đương lớn nhất (mặt cắt nguy hiểm nhất), các tác giả sử dụng code sau đây:

```
maximize(abs(yz), z = 0..4 * l, location)
0.2251432432, {[z = 306.3063063}, 0.2251432432]}
```

$$\sigma_{td} := \text{sqrt}\left(\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{Q_y}{F}\right)^2\right);$$

$$W_x := 456;$$

$$F := 12;$$

$$\sigma_{max} := \text{maximize}(\sigma_{td}, z = 0..4 \cdot l, \text{location}); \# \frac{N}{cm^2}$$

$$408.7440736, \left\{ \left\{ z = 100. \right\}, 408.7440736 \right\}$$

Tài liệu tham khảo

- [1]. Khổng Doãn Điền, Đặng Việt Cường, Vũ Xuân Trường, Vũ Đức Phúc (2014), *Giáo trình Cơ học kỹ thuật*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [2]. Đặng Việt Cường, Khổng Doãn Điền, Nguyễn Văn Huyền, Vũ Xuân Trường, Vũ Đức Phúc (2014), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [3]. Hội Cơ học Việt Nam (2016), *25 năm Olympic Cơ học môn Sức bền vật liệu*, NXB Bách khoa Hà Nội.
- [4]. Hội Cơ học Việt Nam (2016), *Đề thi và đáp án mẫu Olympic Cơ học Toàn quốc môn Ứng dụng tin học trong Sức bền vật liệu*.
- [5]. Den Hartog J.P (1987), *Advance Strength of Materials*, John Wiley & Sons, New York.

ON AN ALGORITHM FOR ANALYSIS OF STATICALLY INDETERMINATE BEAMS

Abstract:

In the strength of materials subject, the structural problem of redundancy is a difficult problem, especially for high degree of redundancy. Especially, since 2017, National Olympic of Mechanics Organizers that formally incorporated into the exam: "IT applications in Strength of Materials" based programming software Maple, so the study of algorithms solving problems relating to material resistance in general and the problem of statically indeterminate beams in particular is an issue of utmost importance and significance. This paper presents an algorithm solving statically indeterminate beams for high degree of redundancy. The results of calculation and simulation are programmed in Maple 2016 and compared with the publications of the Vietnam Mechanics Association that gives accurate and reliable results.

Keywords: *strength of materials, statically indeterminate beams, degree of redundancy.*