ISSN 2354-0575

VỀ MỘT THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TRONG TÍNH TOÁN ĐỘNG HỌC CÁC HỆ CƠ HỌC

Khổng Doãn Điền[1, 2], Vũ Xuân Trường[1], Nguyễn Duy Chinh[1], Nguyễn Tiền Phong[1]
1 Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên
2 Hội Cơ học Hà Nội

Ngày nhận: 20/2/2016
Ngày xét duyệt: 22/3/2016

Tóm tắt:

Bài báo này trình bày một thuật toán phân tích động học áp dụng cho các hệ cơ học khác nhau. Tính linh động của của thuật toán được thể hiện ở chỗ có thể áp dụng cho mọi hệ cơ học và ở mọi thời điểm. Ý tưởng của thuật toán này xuất phát từ sức mạnh tính toán trên trường véc tơ, ma trận của các phần mềm toán học (chẳng hạn Maple). Tuy nhiên một khó khăn phát sinh là việc xử lý tính toán số liệu ở dạng tham số (symbolic), kết quả trả ra sẽ ở dạng biểu thức gốc RootOf, trong khi chúng ta cần kết quả ở dạng tham số (symbolic) hoặc số (numeric). Vấn đề này sẽ được trình bày và giải quyết thấu đáo trong bài báo này.

Từ khóa: *Phân tích động học, tích vô hướng, tích có hướng, biểu thức góc, tham số, liên hợp.*

Các kí hiệu và diễn giải

Ký hiệu	Diễn giải	Biểu diễn
v	Véctơ vận tốc	$\mathbf{v} = <v_x, v_y, v_z>$
a	Véctơ gia tốc	$\mathbf{a} = <a_x, a_y, a_z>$
ω	Véctơ vận tốc góc	$\boldsymbol{\omega} = <\omega_x, \omega_y, \omega_z>$
ε	Véctơ gia tốc góc	$\boldsymbol{\varepsilon} = <\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z>$
×	Tích có hướng của hai véctơ	*CrossProduct(a,b)*
.	Tích vô hướng của hai véc tơ	*DotProduct(a,b)*
Ký hiệu đậm	Véc tơ hoặc ma trận	-

1. Đặt vấn đề

Phân tích động học gồm ba bài toán: bài toán vị trí, bài toán vận tốc và bài toán gia tốc của điểm, vật rắn và hệ vật rắn. Để thực hiện được việc phân tích động học các hệ cơ học có nhiều phương pháp chẳng hạn phương pháp giải tích[1,4,5], phương pháp họa đồ, phương pháp ma trận truyền [2], phương pháp Danevit-Hartenbeg, Crag, [6] …

Ngày nay, với sự phát triển của khoa học công nghệ các phần mềm toán học hỗ trợ đắc lực trong việc tính toán cho con người đã ra đời. Phải kể đến những phần mềm mạnh như Matlab, Maple, Mathematica,… Việc tính toán trên trường véc tơ và ma trận là công việc khó khăn cho việc tính toán thủ công, thậm chí không khả thi. Nhưng tính trên trên trường véc tơ và ma trận lại là sức mạnh của các phần mềm toán học.

Bản chất chung của các phương pháp giải tích là phân tích bài toán ở trường véc tơ nhưng sau đó phải chiếu phương trình véc tơ đó lên các trục của hệ tọa độ để chuyển về dạng giải tích thuận lợi cho việc tìm nghiệm động học. Việc này không phải lúc nào cũng dễ dàng bởi không phải lúc nào cũng xác định được góc hợp bởi véc tơ đó với các trục tọa độ. Tính linh động của những phương pháp này không cao vì chỉ áp dụng cho một thời điểm. Mỗi một thời điểm có một ‘mẹo’ chiếu khác nhau sao cho phương trình giải tích thu được đơn giản hơn.

Bài báo này trình bày một thuật toán phân tích động học áp dụng cho các hệ cơ học khác nhau. Tính linh động của của thuật toán được thể hiện ở chỗ có thể áp dụng cho mọi hệ cơ học và ở mọi thời điểm. Ý tưởng của thuật toán này xuất phát từ sức mạnh tính toán trên trường véc tơ, ma trận của các phần mềm toán học (chẳng hạn Maple). Tuy nhiên một khó khăn phát sinh là việc xử lý tính toán số liệu ở dạng tham số (symbolic), kết quả trả ra sẽ ở dạng biểu thức gốc RootOf, trong khi chúng ta cần kết quả ở dạng tham số (symbolic) hoặc số (numeric).

2. Cơ sở lý thuyết [1,4,6]

Định lý liên hệ vận tốc:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$
$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$$

Định lý liên hệ gia tốc:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$$
$$\mathbf{a}_{BA} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{AB} - \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{AB}$$

Định lý hợp vận tốc:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

trong đó $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{v}_e$ và $\mathbf{v}_r$ lần lượt là véc tơ vận tốc của điểm trong chuyển động tuyệt đối, chuyển động kéo theo và chuyển động tương đối.

Định lý hợp gia tốc:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

Gia tốc Coriolis được xác định bởi biểu thức

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

trong đó: $\mathbf{a}_a$, $\mathbf{a}_e$ và $\mathbf{a}_r$ lần lượt là véc tơ gia tốc của điểm trong chuyển động tuyệt đối, chuyển động kéo theo và chuyển động tương đối;

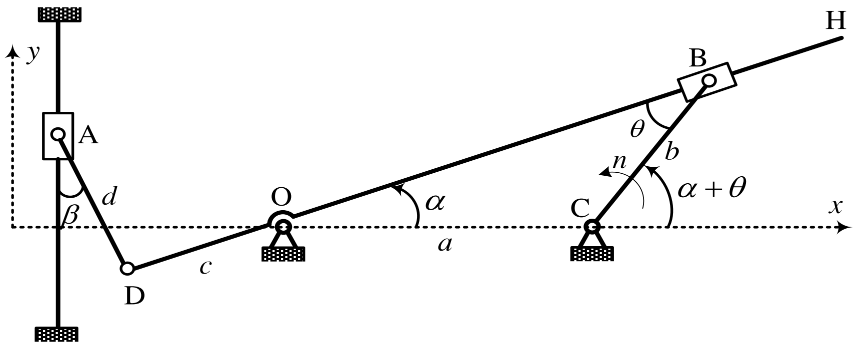
$\mathbf{a}_C$ là gia tốc Coriolis;

$\boldsymbol{\omega}_e$ là véc tơ vận tốc góc trong chuyển động kéo theo.

3. Thuật giải lập trình và xử lý

Xét mô hình có mô hình như Hình 1 [5]. Tay quay chủ động CB quay đều với tốc độ n (vg/phút). Cho biết các độ dài *OC=a, CB=b, OD=c, DA=d* và các góc α, β

Xác định vận tốc và gia tốc điểm D?



Hình 1. *Mô hình động học*

Phân tích giải thuật

+ ***Bài toán vị trí***

- Theo định lý hàm sin

$$\frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin(\pi-(\alpha+\theta))}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = \arcsin\left(\frac{a}{b}\sin\alpha\right) \\ OB = \dfrac{b\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} \end{cases}$$

- Tính toán các véc tơ

$$\mathbf{CB} = \left[b\cos(\alpha+\theta) \quad b\sin(\alpha+\theta) \quad 0\right]^T \tag{2}$$

$$\mathbf{OB} = \left[OB\cos\alpha \quad OB\sin\alpha \quad 0\right]^T \tag{3}$$

$$\mathbf{OD} = \left[-c\cos(\alpha) \quad -c\sin\alpha \quad 0\right]^T \tag{4}$$

$$\mathbf{DA} = \left[-d\sin(\beta) \quad d\cos\beta \quad 0\right]^T \tag{5}$$

Các véc tơ **CB, OB, OD** và **DA** phụ thuộc vào các đại lượng đã biết nên hoàn toàn xác định.

+ ***Bài toán vận tốc***

$$\boldsymbol{\omega}_{CB} = \left[0 \quad 0 \quad \omega\right]^T; \omega = \frac{\pi n}{30} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{DH} = \left[0 \quad 0 \quad \omega_{DH}\right]^T \tag{7}$$

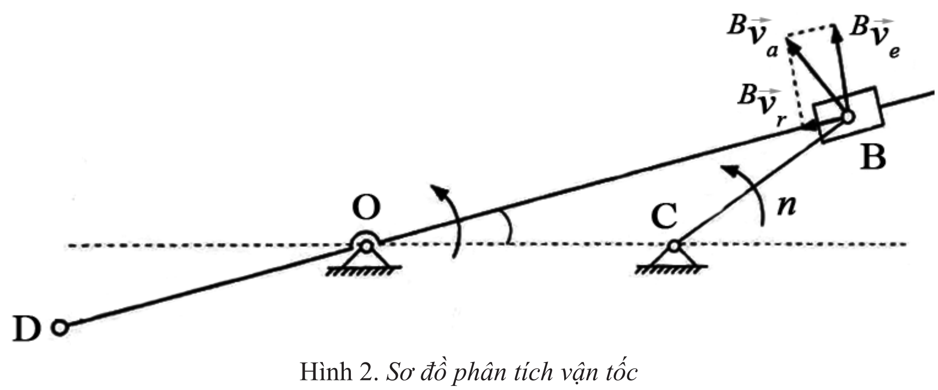
$$\boldsymbol{\omega}_{DA} = \left[0 \quad 0 \quad \omega_{DA}\right]^T \tag{8}$$

$$\mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega}_{DH} \times \mathbf{OD} \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_{DA} \times \mathbf{DA} \tag{10}$$

Do điểm A trượt dọc theo phương *y* nên $v_A = \mathbf{v}_A$[2]

Như vậy muốn tính toán véc tơ $\mathbf{v}_A$ cần phải tính hai véc tơ $\boldsymbol{\omega}_{DA}$ và $\boldsymbol{\omega}_{DH}$.



Hình 2. *Sơ đồ phân tích vận tốc*

Từ sơ đồ phân tích vận tốc trên Hình 2

$$\mathbf{v}_a^B = \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{CB} \tag{11}$$

$$\mathbf{v}_e^B = \boldsymbol{\omega}_{DH} \times \mathbf{OB} \tag{12}$$

Rõ ràng muốn tính $\boldsymbol{\omega}_{DH}$ từ (12) ta phải tính $\mathbf{v}_e^B$.

Mặt khác $\mathbf{v}_a^B = \mathbf{v}_e^B + \mathbf{v}_r^B$ (13)

Trong (13), $\mathbf{v}_r^B$ chưa xác định nhưng $\mathbf{v}_r^B \perp \mathbf{v}_e^B$ nên thuật toán rất đơn giản nhưng hiệu quả ở đây là nhân hai vô hướng hai vế của phương trình (13) với $\mathbf{v}_e^B$ bằng việc sử dụng câu lệnh *DotProduct*. Từ đó xác định được $\mathbf{v}_e^B$ và tính toán được $\boldsymbol{\omega}_{DH}$ từ (12).

Tuy nhiên kết quả trả ra sẽ ở dạng *RootOf* (biểu thức gốc).

ISSN 2354-0575

$$RootOf\left(2\overline{\_Zr-\frac{1}{16}\omega l^2 r\sqrt{3}}\sqrt{3}+6\overline{-\frac{15}{16}\omega l^2 r+\_Zr\sqrt{3}}\right.$$
$$\left.+3\overline{\omega l^2 r}\right)\}$$

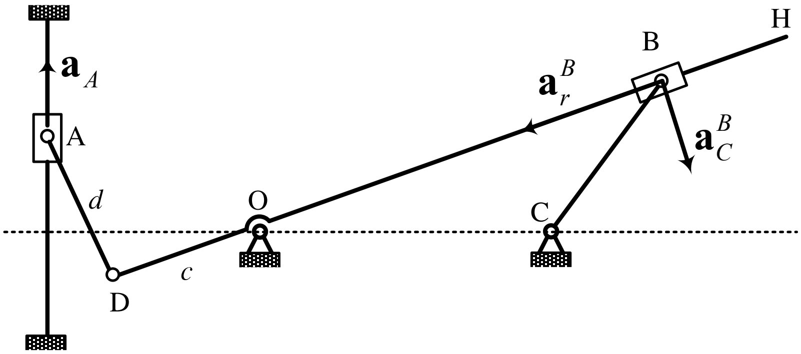
Về mặt cơ học ta biết rằng các đại lượng chẳng hạn *a, b, c, d* là chiều dài nên hiển nhiên dương, nhưng khi tính toán trên các phần mềm toán học chẳng hạn Maple *a, b, c, d* sẽ được hiểu là các đại lượng tổng quát (có thể là số phức, số thực, số nguyên, có thể âm, có thể dương, …) bởi vậy khi tính toán sẽ trả ra kết quả ở dạng biểu thức gốc. Để xử lý vấn đề này ta thêm thuộc tính *conjugate=false* trong biểu thức tính tích vô hướng. Cụ thể:

DotProduct(a,b,conjugate=false)

Như vậy đến đây đã xác định được $\boldsymbol{\omega}_{DH}$ và từ (9) tính được $\mathbf{v}_D$. Từ phương trình (10) ta xác định được $\mathbf{v}_A$ theo $\boldsymbol{\omega}_{DA}$ (chưa biết).

Thuật toán tiếp theo là áp dụng điều kiện biên của chuyển động để xác định $\boldsymbol{\omega}_{DA}$. Ở đây do con trượt A chuyển động theo phương *y* nên $\mathbf{v}_A[1]=0$. Giải phương trình này ta thu được $\boldsymbol{\omega}_{DA}$ và dễ dàng tính được $\mathbf{v}_A$.

+ ***Phân tích bài toán gia tốc***: Tương tự như phân tích bài toán vận tốc



Hình 3. *Sơ đồ phân tích gia tốc*

$$\mathbf{a}_a^B = \mathbf{a}_e^B + \mathbf{a}_r^B + \mathbf{a}_C^B \qquad (14)$$

Ở đây thành phần gia tốc tương đối của điểm B là $\mathbf{a}_r^B$ chưa biết nhưng $\mathbf{a}_r^B \perp \mathbf{a}_C^B$ (hoặc $\mathbf{a}_r^B \perp \mathbf{v}_e^B$) nên ta nhân vô hướng hai vế của (14) với $\mathbf{a}_C^B$ (hoặc $\mathbf{v}_e^B$) từ đó xác định được $\boldsymbol{\varepsilon}_{DH}$ và tính được $\mathbf{a}_D$.

$$\mathbf{a}_D = \boldsymbol{\varepsilon}_{DH} \times \mathbf{OD} - \omega_{DH}^2 \mathbf{OD} \qquad (15)$$

Mặt khác: $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_D + \boldsymbol{\varepsilon}_{DA} \times \mathbf{DA} - \omega_{DA}^2 \mathbf{DA}$ (16)

Áp dụng điều kiện biên về chuyển động $\mathbf{a}_A[1] = 0$ giải được $\boldsymbol{\varepsilon}_{DA}$ từ đó véc tơ $\mathbf{a}_A$ hoàn toàn được xác định.

4. Lập trình tính toán trên phần mềm toán học Maple 18

```
restart:
with(LinearAlgebra):
with(linalg):
#=========BÀI TOÁN VỊ TRÍ=========
θ := arcsin((a/b) sin α):
lOB:= evalf((b sin(α+θ))/(sin α)):#Khoang cach OB
CB:=< b cos(α+θ), b sin(α+θ), 0 >:#Vector CB
CB:=< -c cos(α), -c sin(α), 0 >:#Vector OD
DA:=< -d sin(β), d cos(β), 0 >:#Vector DA
#=========BÀI TOÁN VẬN TỐC=========
ωCB:=< 0,0,ω >:#Vector van toc goc cua thanh CB
ωDH:=< 0,0,ω0 >:#Vector van toc goc cua thanh DH
ωDA:=< 0,0,ω1 >:#Vector van toc goc cua thanh DA

vBa:= CrossProduct(ωCB,CB):#Vector van toc tuyet doi cua diem B
vBe:= CrossProduct(ωDH,OB):#Vector van toc keo theo cua diem B
pt1:=DotProduct(vBa,vBe,conjugate=false)=DotProduct(vBe,vBe,conjugate=false)+
DotProduct(vBr,vBe,conjugate=false):#Phuong trinh hop van toc
```

```
solve({pt1},{ω0}):
assign(%):
vBr:=vBa-vBe:#Vector van toc tuong doi cua diem B
vD:= CrossProduct(ωDH,OD):#Vector van toc cua diem D
vA:= vD + CrossProduct(ωDA,DA):#Vector van toc cua diem A
solve({vA[1]},{ω1}):
assign(%):
#=========BÀI TOÁN GIA TỐC=========
εCB:=< 0,0,ε >:#Vector gia toc goc cua thanh CB
εDH:=< 0,0,ε0 >:#Vector gia toc goc cua thanh DH
εDA:=< 0,0,ε1 >:#Vector gia toc goc cua thanh DA
aBa:= CrossProduct(εCB,CB) − ω^2 CB:#Vector gia toc tuyet doi cua diem B
aBe:= CrossProduct(εDH,OB) − ω0^2 OB:#Vector gia toc keo theo cua diem B
aBc:= CrossProduct(2ωDH,vBr):#Vector gia toc Coriolis cua diem B
pt2:=DotProduct(aBa,aBc,conjugate=false)=DotProduct(aBe,aBc,conjugate=false)+
DotProduct(aBr,aBc,conjugate=false)+
DotProduct(aBc,aBc,conjugate=false):#Phuong trinh hop gia toc
solve({pt2},{ε0}):
assign(%):
aD:= CrossProduct(εDH,OD) − ω0^2 OD#Vector gia toc cua diem D
aA:= aD + CrossProduct(εDA,DA) − ωl^2 DA#Vector gia toc cua diem A
solve({aA[1]},{ε1}):
assign(%):
#=========DỮ LIỆU ĐẦU VÀO=========
n:= 1200:ω := πn/30 :ε := 0:
a:=0.6:b:=0.6:c:=0.6:d:=0.6:
α := π/6 :β := π/6
#=========XUẤT KẾT QUẢ=========
evalf(ω0);#Van toc goc cua thanh DH
                                          62.83185306
evalf(ε0);#Gia toc goc cua thanh DH
                                             -1.3.10^-6
evalf(ω1);#Van toc goc cua thanh DA
                                          36.27598729
evalf(ε1);#Gia toc goc cua thanh DA
                                          4707.604262
evalf(vA[2]);#Van toc cua diem A
                                          -43.53118474
evalf(aA[2]);#Van toc cua diem A
                                          -911.7150012
```

Kết quả tính toán đúng với các công bố trong [5] (sử dụng phương pháp giải tích). Điều này chứng tỏ độ tin cậy và tính chính xác của thuật toán. Từ chương trình lập trình ở trên, thay đổi thông số đầu vào và chạy chương trình trên Maple sẽ thu được các kết quả động học tại các thời điểm khác.

Tài liệu tham khảo

[1]. Khổng Doãn Điền, Đặng Việt Cương, Vũ Xuân Trường, Vũ Đức Phúc, *Giáo trình Cơ học kỹ thuật*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội, 2012.
[2]. Khổng Doãn Điền, Vũ Xuân Trường, Nguyễn Duy Chinh, *Phương pháp số trong Cơ học kỹ thuật*, NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội, 2014.
[3]. Khổng Doãn Điền, Nguyễn Duy Chinh, Vũ Xuân Trường, *Tuyển tập Bài tập & Lời giải Cơ học kỹ thuật, phần Động lực học*, NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội, 2014.

[4]. Nguyễn Văn Khang, *Cơ học kỹ thuật*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội, 2009.
[5]. Nguyễn Phong Điền, Nguyễn Quang Hoàng, Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Minh Phương, *Bài tập Cơ học kỹ thuật*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội, 2010.
[6]. Nguyễn Văn Khang, *Động lực học hệ nhiều vật*, NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 2007.

AN ALGORITHM IN KINETIC ANALYSIS FOR MECHANICAL SYSTEMS

Abtract:
This paper presents a kinematic analysis algorithms applied to diffirent mechanical systems. The flexibility of the algorithm is shown in that can apply to all mechanical systems and at all times. The idea of this algorithm comes from computing power on a vector, matrix of mathematical software (eg Maple). However a difficulty arises that the processing of data in the form of calculation parameters (symbolic), the results will be in the form of original expression RootOf, while we need the results in the form of parameters (symbolic) or number (numeric). This issue will be presented and thoroughly solved in this paper.
Keywords: *Kinetic analysis, DotProduct, CrossProduct, RootOf, Symbolic, Conjugate*