ISSN 2354-0575

ĐA THỨC NỘI SUY HERMITE TRONG MIỀN PHỨC

Nguyễn Thị Loan - Trần Thị Hải Lý

Bộ môn Toán – khoa Khoa Học Cơ Bản- Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Hưng Yên

Ngày tòa soạn nhận được bài báo: 22 - 10 - 2019
Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 28 - 11 - 2019
Ngày bài báo được duyệt đăng: 15 - 12 - 2019

Tóm tắt:

Bài báo đã xây dựng đa thức nội suy Hertmite tổng quát trong miền phức, đồng thời đánh giá được sai số của công thức nội suy dựa vào tích phân hàm biến phức. Trường hợp đặc biệt, khi bội của các mốc nội suy bằng nhau, chúng tôi thiết lập được đa thức nội suy Jacobi.

Từ khóa: *Nội suy phức, Hermite trong miền phức, nội suy Jacobi.*

1. Đặt vấn đề

Bài toán nội suy đa thức nói chung và bài toán nội suy cổ điển tổng quát Hermite nói riêng đóng vai trò quan trọng trong tính toán, nhất là với các ngành kỹ thuật. Bởi trong thực tế, rất nhiều trường hợp biểu thức giải tích của hàm y=f(x) đã biết nhưng việc tính trực tiếp giá trị của nó tại điểm x bất kỳ trên một miền nào đó gặp nhiều khó khăn, nhất là khi cần tính giá trị của hàm tại nhiều điểm. Trong trường hợp đó người ta sẽ dùng nội suy để giảm sự phức tạp trong tính toán. Người ta xây dựng đa thức P(x) trùng với hàm f(x) tại các mốc nội suy còn các điểm khác "tương đối gần" với f(x).

Các tài liệu hiện có thường xét bài toán nội suy với các mốc nội suy là số thực và phương pháp phổ biến là đại số (xem [1,4]).

Trong [2], tác giả đã xét bài toán nội suy Hermite tổng quát với mốc nội suy là số thực nhưng đưa lý thuyết Thặng dư vào để xây dựng công thức nội suy thay cho việc dùng hệ phương trình tuyến tính quen thuộc, đây cũng là một hướng đi mới, đưa giải tích phức vào giải quyết bài toán đại số. Tuy nhiên, khi áp dụng trong thực tế tính toán các bài toán kỹ thuật, nhất là khi đã biết biểu thức hàm f nhưng việc tính trực tiếp trên hàm đó lại quá phức tạp và miền xác định của hàm có thể là phức thì các công thức đã xây dựng bị hạn chế. Để khắc phục, chúng tôi xét trong mặt phẳng phức, với các mốc nội suy là những số phức. Lý thuyết hàm chỉnh hình và ứng dụng của thặng dư (xem [3]) là công cụ chính được sử dụng để đưa ra các kết quả quan trọng của bài báo.

2. Bài toán nội suy Hermite trong miền phức

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền G $\subset \mathbb{C}$ ($f(z) \in H(G)$). Cho hệ điểm $z_1, z_2, \dots, z_m$ thuộc miền G (gọi là các mốc nội suy) và các số tự nhiên tương ứng với các mốc nội suy đó là $k_1, k_2, \dots, k_m$ (gọi là bội của các mốc nội suy) thỏa mãn:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n. \qquad (2.1)$$

Hãy xây dựng đa thức $P(z)$ với bậc thấp nhất có thể thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{aligned} &P(z_j)=f(z_j),\\ &P'(z_j)=f'(z_j), \qquad (2.2)\\ &\dots\\ &P^{(k_j-1)}(z_j) = f^{(k_j-1)}(z_j), j=\overline{1,m}. \end{aligned}$$

Việc xây dựng đa thức P(z) thỏa mãn các điều kiện (2.2) được gọi là *quá trình nội suy với mốc bội* trong miền phức. Các số $k_j, (j=\overline{1,m})$ được gọi là bội của mốc z_j.

Để giải bài toán này, chúng tôi phát biểu Định nghĩa và Bổ đề quan trọng sau:

Định nghĩa 2.1. Đa thức P(z) thỏa mãn các điều kiện (2.2) được gọi là đa thức nội suy đối với hàm f(z) tương ứng với các mốc nội suy z_j với bội k_j, $(j=\overline{1,m})$.

Bổ đề 2.2. *Đa thức nội suy P(z) có bậc bé hơn n thỏa mãn các điều kiện (2.2) (nếu tồn tại) là duy nhất.*

Chứng minh.

Nếu P(z) là đa thức nội suy thì số hạng dư

$$R(z)=f(z)-P(z)$$

là hàm chỉnh hình trong G. Từ đó, suy ra

$$R(z_j) = R'(z_j) = \cdots = R^{(k_j-1)}(z_j) = 0, j = \overline{1,m}.$$

Do đó, R(z) có 0- điểm tại mỗi điểm z_j với bội ít nhất cũng bằng k_j với $j=\overline{1,m}$.

Giả sử $\tilde{P}(z)$ là đa thức khác cũng thỏa mãn điều kiện (2.2). Khi đó, hàm tương ứng $\tilde{R}(z) = f(z) - \tilde{P}(z)$ cũng có các 0- điểm tại mỗi điểm z_j với bội ít nhất cũng bằng k_j ($j=\overline{1,m}$). Điều này cũng đúng đối với hàm

$$R(z) - \tilde{R}(z) = P(z) - \tilde{P}(z).$$

Như vậy, hiệu P(z)- $\tilde{P}(z)$ là đa thức có ít nhất m không điểm $z_1, z_2, \ldots, z_m$ với bội không bé hơn $k_1, k_2, \ldots, k_m$ tương ứng. Từ đó, suy ra rằng hàm P(z)- $\tilde{P}(z)$ chia hết cho đa thức bậc n

$$Q(z)=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}.$$

Do vậy, nếu mỗi đa thức P(z) và $\tilde{P}(z)$ đều có bậc thấp hơn n thì hiệu chúng phải đồng nhất bằng 0, tức là trong tập hợp các đa thức bậc thấp hơn n tồn tại không quá một đa thức thỏa mãn bài toán đã nêu. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Từ bổ đề trên ta có nhận xét sau:

Để tìm đa thức P(z) thỏa mãn điều kiện (2.2) ta có tất cả

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = \sum_{j=1}^{m} k_j$$

điều kiện. Vì số hệ số của đa thức lớn hơn bậc của nó một đơn vị nên ta cần tìm đa thức bậc $\left(\sum_{j=1}^{m} k_j - 1\right)$ và bài toán này gọi là bài toán *nội suy Hertmite trong miền phức.*

3. Các công thức nội suy

Đa thức nội suy Hermite trong miền phức được biểu diễn trong định lý sau:

Định lý 3.1.

Đa thức nội suy P(z) tồn tại và được biểu diễn dưới dạng tích phân

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)} \cdot \frac{Q(\varsigma) - Q(z)}{\varsigma - z} d\varsigma, \tag{3.1}$$

với γ là đường cong đóng Jordan đo được nào đó nằm trong miền G cùng với phần trong của nó và chứa mọi mốc nội suy $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ở trong.

Chứng minh

Trước tiên, ta chứng minh rằng công thức (3.1) biểu diễn đa thức bậc không cao hơn (n-1). Thật vậy, nếu $Q(z) = \sum_{j=0}^{n} A_j z^j$, thì

$$\begin{aligned}
\frac{Q(\varsigma) - Q(z)}{\varsigma - z} &= \frac{\sum_{j=0}^{n} A_j\left(\varsigma^j - z^j\right)}{\varsigma - z} \\
&= A_1 + A_2(\varsigma + z) + \cdots + A_n(\varsigma^{n-1} + \cdots + z^{n-1}) \\
&= \left(A_1 + A_2\varsigma + \cdots + A_n\varsigma^{n-1}\right) + \left(A_2 + \cdots + A_n\varsigma^{n-2}\right)z + \cdots + A_n z^{n-1} \\
&= H_{n-1}(\varsigma) + H_{n-2}(\varsigma)z + \cdots + H_0(\varsigma)z^{n-1},
\end{aligned}$$

trong đó, $H_{n-1}(\varsigma), H_{n-2}(\varsigma)z, \cdots, H_0(\varsigma)z^{n-1}$ là những đa thức đối với ς với bậc trùng với số hiệu của chúng. Từ đó, ta có thể viết P(z) trở thành

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)} \sum_{j=0}^{n-1} H_{n-1-j}(\varsigma) z^j d\varsigma \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)} H_{n-1-j}(\varsigma) z^j d\varsigma \right) z^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j,
\end{aligned}$$

với $a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)} H_{n-1-j}(\varsigma) d\varsigma$; ($j=\overline{0,n-1}$), tức là P(z) là đa thức có bậc $\le$ n-1.

Tiếp theo, ta cần chứng minh P(z) thỏa mãn các điều kiện của bài toán nội suy.

Thật vậy, lập hiệu R(z)=f(z)-P(z). Nếu điểm z nằm trong miền giới hạn bởi γ thì theo công thức tích phân Cauchy, ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma.$$

Từ đó, suy ra

$$\mathrm{R(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)}\cdot\frac{Q(\varsigma)-Q(\mathrm{z})}{\varsigma - z}d\varsigma$$

$$= Q(\mathrm{z})\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\cdot\frac{d\varsigma}{Q(\varsigma)}.$$

Như vậy, số hạng dư R(z) có biểu diễn tích phân

$$\mathrm{R(z)} = Q(\mathrm{z})\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\cdot\frac{d\varsigma}{Q(\varsigma)}. \quad (3.2)$$

Ta xét tích phân

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\cdot\frac{d\varsigma}{Q(\varsigma)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)}}{\varsigma - z}d\varsigma. \quad (3.3)$$

Vì hàm $\frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)}$ không chỉnh hình tại các điểm $z_1, z_2, \ldots, z_m$ nhưng nó liên tục trên γ nên tích phân ở vế phải của biểu thức (3.3) là tích phân dạng Cauchy, nó xác định hàm chỉnh hình trong γ và vì

$$\mathrm{Q(z)}=\left(z-z_1\right)^{k_1}\left(z-z_2\right)^{k_2}\cdots\left(z-z_m\right)^{k_m},$$

nên từ (3.2), thu được

$$\frac{R(\mathrm{z})}{\left(z-z_j\right)^{k_j}} = \left(z-z_1\right)^{k_1}\cdots\left(z-z_{j-1}\right)^{k_{j-1}}\cdot$$

$$\left(z-z_{j+1}\right)^{k_{j+1}}\cdots\left(z-z_m\right)^{k_m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(\varsigma)}{Q(\varsigma)}}{\varsigma - z}d\varsigma \quad (3.4)$$

là hàm chỉnh hình trong lân cận điểm z_j. Từ đó, suy ra

$$\mathrm{R(z)}= \left(z-z_j\right)^{k_j}\varphi(\mathrm{z}), \quad (3.5)$$

trong đó hàm chỉnh hình $\varphi(\mathrm{z})$ là vế phải của (3.4). Hệ thức (3.5) chứng tỏ rằng $z=z_j$ là 0-điểm của R(z) với cấp ít nhất là bằng k_j. Điều này có nghĩa rằng $R(z_j)=0$, $R'(z_j)=0,\ldots,$ $R^{(k_j-1)}(z_j)=0$, tức là điều kiện (2.2) được thỏa mãn. □

Như vậy, đa thức (3.1) thỏa mãn mọi điều kiện của bài toán nội suy đã đặt ra. Do đó, đa thức (3.1) là nghiệm của bài toán nội suy.

Công thức (3.1) biểu diễn đa thức nội suy P(z), công thức (3.2) biểu diễn số hạng dư

$$R(z) = f(z) - P(z)$$

của công thức nội suy

$$f(z) = P(z) + R(z)$$

được gọi là các công thức *Hermite*.

Tiếp theo, ta xét một trường hợp riêng của công thức nội suy Hermite gọi là đa thức nội suy Jacobi Trong miền G, cho m điểm khác nhau $z_1, z_2, \ldots, z_m$, với bội bằng nhau $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = k$, trong đó về sau, k sẽ được tăng vô hạn trong khi các mốc nội suy vẫn giữ nguyên.

Bài toán đặt ra là tìm đa thức $J_{mk-1}(z)$ với bậc không lớn hơn (mk-1) thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{aligned} &J_{mk-1}(z_j)=f(z_j),\\ &J'_{mk-1}(z_j)=f'(z_j), \qquad (3.6)\\ &\ldots\\ &J_{mk-1}^{(k-1)}(z_j) = f^{(k-1)}(z_j),\ j=\overline{1,m}. \end{aligned}$$

Đa thức Jacobi cần tìm được biểu diễn qua hệ quả sau

Hệ quả 3.2. *Đa thức nội suy cần tìm có dạng*

$$J_{mk-1}(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{k-1} Q_n(\mathrm{z})\left[q(\mathrm{z})\right]^n, \quad (3.7)$$

trong đó $Q_n(z)$ là đa thức bậc $\le m$-1.

$$\mathrm{Q}_n(\mathrm{z}) = \sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\left[\mathrm{q}(\varsigma)\right]^n}\cdot\frac{d\varsigma}{\left(\varsigma-z_1\right)\cdots\left(\varsigma-z_{j+1}\right)}\right)\left(z-z_1\right)\cdots\left(z-z_j\right), \quad (3.8)$$

với $q(z)= \left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\cdots\left(z-z_m\right)$.

Chứng minh

Thật vậy, đặt $q(z)=\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\cdots\left(z-z_m\right)$, khi đó

$$\omega_{mk}(\mathrm{z}) = \left(z-z_1\right)^k\left(z-z_2\right)^k\cdots\left(z-z_m\right)^k = \left[q(\mathrm{z})\right]^k.$$

Từ đó, theo công thức Hermite, ta có

$$J_{mk-1}(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\left[q(\varsigma)\right]^k}\cdot\frac{\left[q(\varsigma)\right]^k - \left[q(\mathrm{z})\right]^k}{\varsigma - z}d\varsigma. \quad 3.9)$$

Bằng những biến đổi đơn giản biểu thức dưới dấu tích phân ta được

$$\frac{1}{\left[q(\varsigma)\right]^k}\cdot\frac{\left[q(\varsigma)\right]^k - \left[q(\mathrm{z})\right]^k}{\varsigma - z} =$$

$$= \frac{q(\varsigma)-q(\mathrm{z})}{\varsigma - z}\left\{\frac{1}{q(\varsigma)} + \frac{q(\mathrm{z})}{\left[q(\varsigma)\right]^2} + \cdots + \frac{\left[q(\mathrm{z})\right]^{k-1}}{\left[q(\varsigma)\right]^k}\right\} \quad (3.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{\left[q(\varsigma)\right]^{n+1}}\frac{q(\varsigma)-q(\mathrm{z})}{\varsigma - z}\left[q(\mathrm{z})\right]^n.$$

Thế (2.12) vào (2.11), ta được

$$J_{mk-1}(z)=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\left[q(\varsigma)\right]^{n+1}}\cdot\frac{q(\varsigma)-q(z)}{\varsigma-z}d\varsigma\right)\left[q(z)\right]^{n}. \quad (3.11)$$

Bằng một số biến đổi trên hàm phân thức ta dễ dàng có

$$\frac{1}{q(\varsigma)}\cdot\frac{q(\varsigma)-q(z)}{\varsigma-z}=\frac{1}{\varsigma-z}+\frac{z-z_1}{(\varsigma-z_1)(\varsigma-z_2)}+\cdots+\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_{m-1})}{(\varsigma-z_1)\cdots(\varsigma-z_m)}.$$

Từ đó, ta có đa thức

$$\begin{aligned}Q_n(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\left[q(\varsigma)\right]^{n+1}}\cdot\frac{q(\varsigma)-q(z)}{\varsigma-z}d\varsigma\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\left[q(\varsigma)\right]^{n}}\cdot\frac{d\varsigma}{(\varsigma-z_1)\cdots(\varsigma-z_{j+1})}\right](z-z_1)\cdots(z-z_j)\\&=\sum_{j=0}^{m-1}A_j(z-z_1)\cdots(z-z_j).\end{aligned} \quad (3.12)$$

Hệ thức (3.12) chứng tỏ rằng $Q_n(z)$ là đa thức bậc bé hơn hoặc bằng (m-1) với các hệ số là các tích phân dạng

$$A_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\left[q(\varsigma)\right]^{n+1}}\cdot\frac{d\varsigma}{(\varsigma-z_1)\cdots(\varsigma-z_{j+1})}.$$

Các tích phân này có thể tính được nhờ các định lý về thặng dư.

Như vậy, từ (3.11) và (3.12), thu được công thức (3.7) được gọi là đa thức nội suy Jacobi.

Tiếp theo, ta nghiên cứu phần dư của công thức nội suy này.

Thật vậy, tương tự bài toán nội suy Hermite tổng quát ta có số hạng dư thu được của công thức nội suy Jacobi có dạng

$$R_{mk}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}\cdot\frac{\left[q(z)\right]^{k}}{\left[q(\varsigma)\right]^{k}}d\varsigma. \quad (3.13)$$

Để ước lượng $|R_{mk}(z)|$ ta lấy γ là đường Lemniscate $\gamma(\rho)$ với các tiêu điểm $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (vì ngay từ đầu ta chỉ đòi hỏi đường cong γ cùng với phần trong của nó thuộc miền chỉnh hình của hàm f và chứa trong nó mọi điểm $z_1, z_2, \ldots, z_m$), khi đó $|q(z)|=\rho^m$.

Ta biết rằng Lemniscate chứa trong nó mọi tiêu điểm $z_1, z_2, \ldots, z_m$ bất luận số $\rho>0$ là bao nhiêu. Giả sử $\rho_0>0$ là bán kính của Lemniscate $\gamma(\rho_0)$ mà trong $\gamma(\rho_0)$ hàm f(z) chỉnh hình và giả sử $\rho>0$ là số dương tùy ý bé hơn ρ_0. Khi đó, với số ρ' bất kỳ mà $\rho<\rho'<\rho_0$ thì lemniscates $\gamma(\rho')$ thuộc phần trong của $\gamma(\rho_0)$ và nó chứa tập hợp đóng

$\overline{D_\rho}$ = {phần trong của $\gamma(\rho)$ } $\cup\gamma(\rho)$.

Vì khi z $\in\overline{D_\rho}$ ta có $|q(z)|\le\rho^m$, còn tại các điểm $\varsigma\in\gamma(\rho')$ ta có $|q(z)|=|q(\varsigma)|=(\rho')^m$ nên nếu lấy γ là đường Lemniscate $\gamma(\rho')$ thì

$$|R_{mk}(z)|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sup\limits_{z\in\gamma(\rho')}|f(z)|}{dist(\gamma(\rho);\gamma(\rho'))}\cdot\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{mk}l_{\gamma}(\rho'), \quad (3.14)$$

với $z\in D_\rho, l_\gamma(\rho'):=$ độ dài $\gamma(\rho')$.

Từ ước lượng (3.14) suy ra khi $k\to\infty$ thì $R_{mk}(z)$ hội tụ đều đến 0 trên $\overline{D_\rho}$. □

4. Kết luận

Trong nội dung nghiên cứu này tác giả đã xây dựng đa thức nội suy tổng quát Hermite, đánh giá sai số của phép nội suy và xét trường hợp đặc biệt khi bội của các mốc nội suy bằng nhau, ta có đa thức nội suy Jacobi.

Các đa thức nội suy này được xây dựng trên miền phức, khắc phục những hạn chế của đa thức nôi suy chỉ xây dựng trên miền thực, điều này mang ý nghĩa quan trọng trong tính toán.

Tài liệu tham khảo

[1]. N.V. Mậu, *Nội suy đa thức*, NXB ĐHQGHN, 2016.

[2]. N.T.Loan, Nội suy Hermite bằng công cụ giải tích phức, *Tạp chí Khoa học và công nghệ. Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên.* 19 (2018), 52-55.

[3]. N.T.Thanh, *Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.

[4]. A.O. Gelfond, *Isqislenie koneqnyh raznostedi* , Moskva, Nauka, 1967.

HERMITE INTERPOLATION POLYNOMIALS IN COMPLEX DOMAIN

Abstract:

This paper establishes general Hermite interpolation polynomial in complex domain. At the same time, we evaluate the error of this interpolation polynomial based on complex integrals. Especialylly, when the multiple of the interpolation points is equal, we give Jacobi interpolation polynomial.

Keywords: *Complex interpolation, Hermite in complex domain, Jacobi interpolation.*