ISSN 2354-0575

XẤP XỈ TROTTER_KATO CỦA C_0 NỬA NHÓM

Trịnh Xuân Yến
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên

Ngày tòa soạn nhận được bài báo: 10/05/2018
Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 18/07/2018
Ngày bài báo được duyệt đăng: 02/08/2018

Tóm tắt:

Trong bài báo này sẽ trình bày về một số xấp xỉ Trotter_Kato và xấp xi Yosida của nửa nhóm các toán tử liên tục mạnh $(T(t))_{t\geq 0}$ *trong không gian Banach và mối quan hệ của nửa nhóm liên tục mạnh với toán tử sinh của nó. Bài viết sử dụng tính chất bị chặn của nửa nhóm liên tục mạnh và một số tính chất của toán tử sinh của nó và giải thức chứng minh tính hội tụ và hội tụ đều của dãy các nửa nhóm.*

Từ khóa: *Nửa nhóm liên tục mạnh, toán tử sinh, không gian Banach.*

1. Đặt vấn đề

Xấp xỉ, nhiễu loạn là những phương pháp chính được sử dụng để nghiên cứu toán tử phức tạp và nửa nhóm nó sinh ra. Đối với một toán tử (A,D(A)) trên X thỏa mãn các điều kiện Hille-Yosida trong định lý về toán tử sinh, ta xác định xấp xỉ Yosida (bị chặn)

$$A_n = nAR(n, A),$$

sinh ra các nửa nhóm (liên tục đều) $(e^{tA_n})_{t\geq 0}$, với

$$R(n,A) = (nI - A)^{-1}, n \in \mathrm{N}.$$

Sử dụng sự kiện $A_n \to A$ theo từng điểm trên D(A) khi $n \to \infty$ có thể chứng tỏ rằng các nửa nhóm cũng hội tụ, tức là

$$e^{tA_n} \to T(t) \text{ khi } n \to \infty.$$

Trong bài viết này sẽ đưa ra một số công cụ nghiên cứu các tính chất hội tụ và xấp xỉ của nửa nhóm một cách có hệ thống và xét mối quan hệ giữa ba đối tượng: nửa nhóm, toán tử sinh và giải thức.

2. Các định lý xấp xỉ Trotter_Kato

2.1. Định nghĩa

Một không gian con D của miền xác định D(A) của một toán tử tuyến tính $A: D(A) \subseteq X \to X$ *được gọi là một lõi đối với A nếu D là trù mật trong D(A) với chuẩn đồ thị* $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$.

2.2. Bổ đề

Cho A và B là các toán tử sinh của nửa nhóm liên tục mạnh $(T(t))_{t\geq 0}$ *và* $(S(t))_{t\geq 0}$ *tương ứng. Với* $x \in X$ *và* $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ *ta có*

$$R(\lambda,B)[T(t) - S(t)]R(\lambda,A)x =$$

$$= \int_0^t S(t-s)[R(\lambda,A) - R(\lambda,B)]T(s)xds$$

ở đây, $\rho(A) = \{\lambda \in K \,|\, (\lambda I - A)^{-1} \ \exists$ và liên tục $\}$.

Chứng minh: Với $x \in X$ và $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, hàm giá trị $s \mapsto S(t-s)R(\lambda,B)T(s)R(\lambda,A)x$ là khả vi.

Xét một toán tử đơn giản

$$\frac{d}{ds}[S(t-s)R(\lambda,B)T(s)R(\lambda,A)x]$$

$$S(t-s)[-BR(\lambda,B)T(s) + R(\lambda,B)T(s)A]R(\lambda,A)x$$

$$= S(t-s)[R(\lambda,A) - R(\lambda,B)]T(s)x$$

ở đây sử dụng tính chất $R(\lambda,A)T(s)x = T(s)R(\lambda,A)x$.

Từ đó suy ra

$$\int_0^t S(t-s)[R(\lambda,A) - R(\lambda,B)]T(s)xds =$$

$$= S(t-s)R(\lambda,B)T(s)R(\lambda,A)x \Big|_0^t$$

$$= R(\lambda,B)[T(t) - S(t)]R(\lambda,A)x$$

2.3. Định lý xấp xỉ Trotter_Kato thứ nhất

Cho $(T(t))_{t\geq 0}$ *và* $(T_n(t))_{t\geq 0}$ $(n \in \mathbb{N})$ *là các nửa nhóm liên tục mạnh trên X với các toán tử sinh A và* A_n *tương ứng, và giả thiết rằng chúng thỏa mãn đánh giá* $\|T(t)\|, \|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t}$ $\forall t \geq 0, n \in \mathbb{N}$ *và các hằng số* $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$.

Cho D là một lõi đối với A và xét các khẳng định sau:

(a) $D \subset D(A)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *và* $A_n x \to Ax$ $\forall x \in D$

(b) Với mỗi $x \in D$, *tồn tại* $x_n \in D(A_n)$ *sao cho* $x_n \to x$ *và* $A_n x_n \to Ax$

(c) $R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda,A)x$ *với mọi* $x \in X$ *và với mọi* $\lambda > \omega$

(d) $T_n(t)x \to T(t)x$ *với mọi* $x \in X$, *đều với t trong các khoảng compact.*

Khi đó ra suy ra (a) $\Rightarrow$ *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d) đúng, trong đó (b) là không suy ra (a)*

Chứng minh:

(a) ⇒ (b) là hiển nhiên

(b) ⇒ (c) cho $\lambda > \omega$ ta có

$$\|R(\lambda, A_n)\| \le \frac{M}{\lambda - \omega} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cho $x \in D$ và xác định $y = (\lambda I - A)x$, y thuộc không gian con trù mật $(\lambda I - A)D$.

Theo giả thiết từ (b) tồn tại $(x_n) \subset D(A_n)$ sao cho $x_n \to x$ và $A_n x_n \to$ Ax do đó $y_n = (\lambda I - A_n)x_n \to y$

Xét đánh giá

$$\|R(\lambda, A_n)y - R(\lambda, A)y\| \le \|R(\lambda, A_n)y - R(\lambda, A_n)y_n\| +$$
$$+\|R(\lambda, A_n)y_n - R(\lambda, A)y\|$$
$$\le \|R(\lambda, A_n)\|.\|y - y_n\| + \|x_n - x\|$$

do $x_n \to x$, $y_n \to y$ suy ra $R(\lambda, A_n)y \to R(\lambda, A)y$ với mọi $y \in (\lambda I - A)D$. Do $(\lambda I - A)D$ là không gian con trù mật nên nó vẫn đúng với $y \in X$.

(c) ⇒ (b) đối với $y \in (\lambda I - A)D$ sao cho $x = R(\lambda, A)y$ và $x_n = R(\lambda, A_n)y$, với $\lambda > \omega$ cố định và nhận xét rằng $x_n \to x$ vì (c) và $A_n x_n = A_n R(\lambda, A_n)y = \lambda R(\lambda, A_n)y - y$ hội tụ tới $\lambda R(\lambda, A)y - y$ suy ra $A_n x_n \to Ax$.

(d) ⇒ (c) từ biểu diễn tích phân của giải thức $R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\,dt$ với $\lambda > \omega$.

Ta có

$$\|R(\lambda, A)x - R(\lambda, A_n)x\| \le \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\|T(t)x - T_n(t)x\|dt$$

Do $T_n(t)x \to T(t)x$ và do định lý hội tụ bị chặn của Lebesgue suy ra

$$R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda, A)x$$

(c) ⇒ (d) với x cố định và một khoảng $0 \le t \le T$

Xét

$$\|(T_n(t) - T(t))R(\lambda, A)x\| \le \|T_n(t)(R(\lambda, A) - R(\lambda, A_n))x\|$$
$$+\|R(\lambda, A_n)(T_n(t) - T(t))x\| +$$
$$+\|R(\lambda, A_n) - R(\lambda, A))T(t)x\|$$
$$= D_1 + D_2 + D_3$$

Do $\|T_n(t)\| \le M.e^{\omega t}$ với $0 \le t \le T$, do giả thiết (c) suy ra $D_1 \to 0$ khi $n \to \infty$ đều trên [0,T].

Cũng vậy, do $t \mapsto T(t)x$ là liên tục, tập $\{T(t)x : 0 \le t \le T\}$ compact trong X và do đó $D_3 \to 0$ khi $n \to \infty$ trên [0,T].

Cuối cùng sử dụng bổ đề 2.2 với $B = A_n$ ta có

$$\|R(\lambda, A_n)(T_n(t) - T(t))R(\lambda, A)x\| \le$$
$$\int_0^t \|T_n(t-s)\|.\|(R(\lambda, A) - R(\lambda, A_n))T(s)x\|ds \qquad (*)$$
$$\le \int_0^T \|T_n(t-s)\|.\|(R(\lambda, A) - R(\lambda, A_n))T(s)x\|ds$$

Hàm dưới dấu tích phân bên phía phải là bị chặn bởi $2M^3 e^{2\omega T}(\lambda - \omega)^{-1}\|x\|$ vì $\|T_n(t-s)\| \le M.e^{\omega(t-s)} \le M.e^{\omega T}$, $\|R(\lambda, A) - R(\lambda, A_n)\| \le 2M(\lambda - \omega)^{-1}$, $\|T(s)\| \le M.e^{\omega T}$,

suy ra

$$\|T_n(t-s)\|.\|(R(\lambda, A) - R(\lambda, A_n))T(s)x\| \le \frac{2M^3 e^{2\omega T}\|x\|}{(\lambda - \omega)}$$

nó tiến tới 0 khi $n \to \infty$ bởi định lý hội tụ bi chặn của Lebesgue vế bên phải (*) tiến tới 0 và do đó $\lim_{n\to\infty}\|R(\lambda, A_n)(T_n(t) - T(t))R(\lambda, A)x\| = 0$ (**) và giới hạn trong (**) là đều trên [0,T]. Do đó với mọi $x \in D(A)$ có thể viết là $x = R(\lambda, A)z$ với $z \in X$. Ta suy ra rằng từ (**) rằng với $x \in D(A)$ khi $n \to \infty$ đều trên [0,T]. Từ đó suy ra với $x \in D(A)$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|(T_n(t) - T(t))x\| = 0$$

và giới hạn trên là đều trên [0,T]. Do $\|T_n(t) - T(t)\|$ là bị chặn đều trên [0,T] và do D(A) là trù mật trong X ta suy ra giới hạn trên đúng với mọi $x \in X$ đều trên [0,T].

2.4. Định lý xấp xỉ Trotter_Kato thứ hai

Cho $(T_n(t))_{t\ge 0}$ $n \in \mathbb{N}$ *là các nửa nhóm liên tục mạnh trên X với các toán tử sinh* $(A_n, D(A_n))$ *tương ứng thõa mãn điều kiện ổn định* $\|T_n(t)\| \le M.e^{\omega t}$ *với các hằng số* $M \ge 1, \omega \in \mathbb{R}$ *và với mọi* $t \ge 0, n \in \mathbb{N}$. *Với* $\lambda_0 > \omega$ *xét các khẳng định sau.*

(a) Tồn tại các toán tử xác định trù mật (A,D(A)) sao cho $A_n x \to$ Ax *với mọi x trong lõi D của A và sao cho miền giá trị* $rg(\lambda_0 I - A)$ *là trù mật trong X.*

(b) Các toán tử $R(\lambda_0, A_n)$ $n \in \mathbb{N}$ *là hội tụ mạnh tới một toán tử* $R \in L(X)$ *với miền giá trị trù mật rgR.*

(c) Các nửa nhóm $(T_n(t))_{t\ge 0}$ $n \in \mathbb{N}$ *là hội tụ mạnh (và đều) với* $t \in [0, t_0]$ *tới một nửa nhóm liên tục mạnh* $(T(t))_{t\ge 0}$ *với toán tử sinh B sao cho* $R = R(\lambda, B)$.

Khi đó ta suy ra (a) ⇒ (b) ⇔ (c) . Đặc biệt nếu (a) đúng thì B = -A.

Chứng minh:

Không làm mất tính tổng quát sau khi thay nửa nóm đã cho bởi nửa nhóm điều chỉnh lại, chỉ cần xét các nửa nhóm bị chặn đều.

(a) ⇒ (b) Như chứng minh ở trên, chỉ cần chứng minh sự hội tụ của dãy $(R(\lambda_0, A_n)y)_{n\in\mathbb{N}}$ với $y = (\lambda_0 I - A)x \quad x \in D$. Thật vậy, do

$$R(\lambda_0, A_n)y =$$
$$= R(\lambda_0, A_n)\left[(\lambda_0 I - A_n)x - (\lambda_0 I - A_n)x + (\lambda_0 I - A)x\right]$$
$$= x + R(\lambda_0, A_n)(A_n x - \text{Ax}) \to x = Ry$$ (vì giả thiết

$A_n x \to \mathrm{A}x$ với mọi $x \in D$) khi $n \to \infty$. Hơn nữa rgR chứa D, do đó nó trù mật trong X.

(c) ⇒ (b) do định lý 2.3

(b) ⇒ (c) sẽ thu được một giả giải thức $\{R(\lambda):\lambda > 0\}$ xác định bởi $R(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x \quad x \in X$. Giả giải thức này thỏa mãn, với mọi $\lambda > 0$. $\|\lambda R(\lambda)\| \le M$ và vì $R(\lambda)^k = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)^k$, $\|\lambda^k R(\lambda)^k\| \le M$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Hơn nữa, nó có miền giá trị trù mật $rgR(\lambda) = rgR$. Do đó nó cho sự tồn tại của một toán tử xác định trù mật (B,D(B)) sao cho $R(\lambda) = R(\lambda, B)$ với λ > 0. Hơn nữa toán tử này toán tử này thỏa mãn đánh giá Hille-Yosida $\|\lambda^k R(\lambda, B)^k\| \le M$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Do đó sinh ra một nửa nhóm liên tục mạnh bị chặn $(T(t))_{t\ge 0}$ với toán tử sinh B sao cho $R(\lambda) = R(\lambda_0, B)$.

Bước cuối cùng cần chứng minh nếu (a) đúng thì suy ra $\overline{A} = B$.

Do $R(\lambda_0, B) = R$. Ta có: $R(\lambda_0, B)(\lambda_0 I - A)x = x$ với mọi $x \in D$.

Tuy nhiên, D là một lõi đối với $\overline{A}$ và do đó $R(\lambda_0, B)(\lambda_0 I - \overline{A})x = x$ với mọi $x \in D(\overline{A})$.

Từ điều này suy ra rằng λ_0 không là một giá trị riêng xấp xỉ của $\overline{A}$. Hơn nữa $rg(\lambda_0 I - A)$ là trù mật trong X bởi giả thiết, do đó λ_0 không phụ thuộc về phổ dư của $\overline{A}$. Do đó $\lambda_0 \in \rho(A)$ và ta thu được: $R(\lambda_0, \overline{A}) = R(\lambda_0, B)$ tức là $\overline{A} = B$.

3. Xấp xỉ Yosida

Cho (A,D(A)) là một toán tử trên X thỏa mãn các điều kiện của định lý về toán tử sinh với mỗi $n \in \mathbb{N}$, xác định xấp xỉ Yosida

$$A_n = n\mathrm{A}R(n, A) \in L(X)$$

Nhận xét:

Các toán tử A_n, $n \in \mathbb{N}$ là giao hoán với nhau. Tính chất này cho phép chứng minh đơn giản và trực tiếp một bước cốt yếu trong định lý xấp xỉ 2.3.

3.1. Bổ đề:

Cho $(T(t))_{t\ge 0}$ *và* $(T_n(t))_{t\ge 0}$ $n \in \mathbb{N}$ *là các nửa nhóm liên tục mạnh, với các toán tử sinh tương ứng là (A,D(A)) và toán tử sinh bị chặn* A_n. *Hơn nữa giả sử rằng* $(T(t))_{t\ge 0}$ *và* $(T_n(t))_{t\ge 0}$ *thỏa mãn điều kiện ổn định:*

$$\|T(t)\|;\|T_n(t)\| \le M.e^{\omega t} \text{ với } t \ge 0$$

và $A_n T(t) = T(t) A_n$

với mọi $n \in \mathbb{N}$ *và t > 0. Nếu* $A_n x \to \mathrm{A}x$ *với mọi x trong lõi D của A, thì* $T_n(t)x \to T(t)x$ *với mọi* $x \in X$ *đều với* $t \in [0, t_0]$

Chứng minh: Với $x \in D$ và $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$T_n(t)x - T(t)x = -\int_0^t \frac{d}{ds}\big[T_n(t-S)T(s)x\big]ds$$

$$= \int_0^t T_n(t-s)(A_n - A)T(s)x\,ds$$

$$= \int_0^t T_n(t-s)T(s)(A_n x - Ax)\,ds$$

do đó

$$\|T_n(t)x - T(t)x\| \le t.M^2 e^{\omega t}\|A_n x - \mathrm{A}x\|$$

suy ra

$$T_n(t)x \to T(t)x$$

3.2. Công thức xấp xỉ đầu tiên:

Cho $(T(t))_{t\ge 0}$ là một nửa nhóm co liên tục mạnh trên X với toán tử sinh (A,D(A)). Khi đó toán tử bị chặn

$$A_n = \frac{T(1/n) - I}{1/n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Xấp xỉ A trên D(A) sinh ra một nửa nhóm co $(e^{tA_n})_{t\ge 0}$ do đó ta thu được công thức xấp xỉ suy ra sau đây.

3.3. Hệ quả: *Với định nghĩa trên ta có:*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} e^{-nt}.e^{ntT(1/n)}x$$

với mọi $x \in X$ *và đều với t trong* $[0, t_0]$.

Tài liệu tham khảo

[1]. Phạm Kỳ Anh, Trần Đức Long. *Giáo trình Hàm thực và Giải tích hàm,* NXB ĐHQG HÀ NỘI, 2001.

[2]. Hoàng Tụy. *Giáo trình Hàm thực và Giải tích hàm*, NXB ĐHQG HÀ NỘI, 2002.

[3]. Jerome. A. Goldstein. *Semigroups of Linear Operators anh Application*, Oxford University Press. Clarendon Press, 1985.

[4]. Klaus-Jochen Engel Rainer Nagel. *One-Parameter Semigroups of Linear Evolution Equation*, Springer, 2000.

[5]. A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators anh Application to Partial Differential Equations,* Springer, New York, 1983.

[6]. Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag, 1976.

ISSN 2354-0575

APPROXIMATION TROTTER_KATO OF C_0 SEMIGROUP

Abstract:

In this paper we will state about some Trotter-Kato approximation and Yosida approximation of strongly continuous operator semigroups and its generators. The paper used boundedness of strongly continuous semigroups and the property of generator and resolvent prove that convergence and uniform convergence of semigroups.

Keywords: *Strongly continuous semigroups, generators, Banach space.*